Lógica de Predicados

Raquel de Souza Francisco Bravo

e-mail: raquel@ic.uff.br

27 de outubro de 2016

O que não é possível expressar em Lógica Proposicional?

- Todo tricolor é um campeão. Roberto é tricolor. Logo Roberto é um campeão.
- A adição de dois números ímpares quaisquer é um número par.
- Acesso a esse recinto é permitido somente para as pessoas autorizadas ou conhecidas de pessoas autorizadas.

Por quê?

Lógica Proposicional

- Fbf's proposicionais têm uma possibilidade limitada de expressão.

Ex: Sócrates é homem.
Todo homem é mortal.
Logo, Sócrates é mortal.

✓ Intuitivamente, podemos ver que esse argumento é válido.

✓ A formalização desse arqumento resulta em $p \wedge q \rightarrow r$

✓ E como mostrar que a conclusão r é uma consequência lógica das premissas p e q.

✓ A validade do argumento depende do significado da palavra todo, que não pode ser expresso na lógica proposicional.

Lógica de Predicados ou lógica de 1ª ordem

Sintaxe da Lógica de Predicados

As fbf's da lógica de predicados é composta por:

- Conectivos Lógicos
  - ✓ $\neg$
  - ✓ $\wedge$
  - ✓ $\vee$
  - ✓ $\rightarrow$
  - ✓ $\leftrightarrow$
- Objetos
- Predicados
- Variáveis
- Quantificadores

Objetos e Predicados

- Objetos:
  - ✓ Concretos
    - ➢ Ex: esse livro, a lua
  - ✓ Abstratos
    - ➢ Ex: conjunto vazio, a paz
  - ✓ Fictícios
    - ➢ Ex: unicórnio, Saci Pererê
- Também podem ser:
  - ✓ Atômicos ou compostos
    - ➢ Ex: um teclado é composto de teclas.

Um objeto pode ser qualquer coisa a respeito da qual precisamos dizer algo.

Por convenção, nomes de objetos são escritos com inicial minúscula e assumimos que nomes diferentes denotam objetos diferentes.

Objetos e Predicados

Um predicado denota uma relação entre objetos de um determinado contexto de discurso.

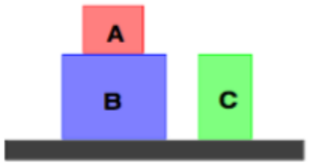

Figura 1. Blocos empilhados sobre uma mesa.

- ✓ podemos dizer que o bloco a está sobre o bloco b usando o predicado **sobre** e escrevendo Sobre(a, b);
- ✓ para dizer que o bloco b é azul, podemos usar o predicado **cor** e escrever Cor(b, azul);
- ✓ para dizer que o bloco b é maior que o bloco c, podemos usar o predicado **maior** e escrever Maior(b,c)

- Por convenção, nomes de predicados são escritos com inicial maiúscula.

Variáveis e Quantificadores

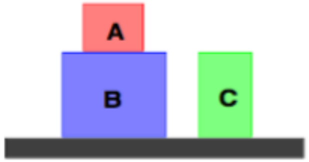

Figura 1. Blocos empilhados sobre uma mesa.

✓ Grande parte da expressividade da lógica de predicados é devida ao uso dos conectivos lógicos, que nos permitem formar senteças complexas a partir de sentenças mais simples.

- Ex: podemos dizer que o bloco a está sobre o bloco b e que este está sobre a mesa escrevendo:

$$\boxed{\text{Sobre}(a, b) \wedge \text{Sobre}(b, \text{mesa})}$$

Variáveis e Quantificadores

- O que realmente torna a lógica de predicados mais expressiva que a lógica proposicional é a noção de variáveis e quantificadores:

  - usando **variáveis**, podemos estabelecer fatos a respeito de objetos de um determinado contexto de discurso, sem ter que nomear explicitamente esses objetos (por convenção, nomes de variáveis são escritos com letra minúscula);
  - usando o **quantificador universal** ($\forall$), podemos estabelecer fatos a respeito de todos os objetos de um contexto, sem termos que enumerar explicitamente todos eles; e, usando o **quantificador existencial** ($\exists$) podemos estabelecer a existência de um objeto sem ter que identificar esse objeto explicitamente.

Variáveis e Quantificadores

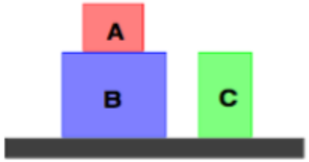

Figura 1. Blocos empilhados sobre uma mesa.

- Podemos dizer que todo bloco está sobre alguma coisa (bloco ou mesa) escrevendo:

$$\forall x[Bloco(x) \rightarrow \exists y\ [Sobre(x, y)]]$$

Quantificadores e Predicados

“Para todo x, x > 0”

$$\downarrow$$

$$\forall x\ (x > 0)$$

- ✓ $\forall$, quantificador universal, que se lê “para todo”, “para cada” ou “para qualquer”;
- ✓ “$x > 0$”, é o predicado e descreve uma propriedade da variável x, a de ser positiva;

- Podemos representar alguma propriedade ou predicado não-explicitado que a variável x possa ter. Assim, a sentença mais geral é:

$$\forall x\ P(x)$$

Quantificadores e Predicados

- Qual valor lógico da expressão $\forall x\ (x > 0)$?

  ✓ Depende do domínio dos objetos sobre os quais estamos nos referindo, isto é, a coleção de objetos entre os quais x pode ser escolhido. Essa coleção de objetos é chamada de <u>conjunto universo</u>.

  ✓ Se o conjunto universo consistisse de todos os números positivos, qual seria o valor lógico da fbf?

  Verdadeiro

  ✓ Se o conjunto universo consistisse de todos os números inteiros, qual seria o valor lógico da fbf?

  Falso

Exemplo

$\forall x \, P(x)$

- Conjunto universo: todos os livros da biblioteca municipal;
- P(x) é a propriedade de se ter a capa vermelha;
- $\forall x \, P(x)$ diz que todos os livros da biblioteca municipal têm capa vermelha.

Qual o valor lógico?

Falso

Exercício:

Qual o valor lógico da expressão $\forall x\, P(x)$ em cada uma das interpretações a seguir:

- P(x) é a propriedade que x é amarelo e o conjunto universo é o conjunto de todos os botões-de-ouro. → **Verdadeiro**
- P(x) é a propriedade que x é amarelo e o conjunto universo é o conjunto de todas as flores. → **Falso**
- P(x) é a propriedade que x é planta e o conjunto universo é o conjunto de todas as flores. → **Verdadeiro**
- P(x) é a propriedade que x é um número positivo ou número negativo e o conjunto universo é o conjunto de todos os números inteiros. → **Falso**

Quantificadores e Predicados

"Existe um x tal que $x > 0$"

$\exists x\,(x > 0)$

- ✓ $\exists$, quantificador existencial, que se lê "existe", "há pelo menos um", "existe algum" ou "para algum";
- Qual valor lógico da expressão $\exists x\,(x > 0)$?
  - ✓ Depende do conjunto universo;
  - ✓ Se o conjunto universo contiver um número positivo, qual seria o valor lógico da fbf?

    Verdadeiro

  - ✓ Se o conjunto universo consistir dos números negativos, qual seria o valor lógico da fbf?

    Falso

Fbf's predicadas

- Expressões podem ser construídas combinando-se predicados com quantificadores, símbolos de agrupamento (parênteses ou colchetes) e os conectivos lógicos da lógica proposicional.

- Uma expressão tem que obedecer regras de sintaxe para ser considerada uma fórmula bem-formulada.

- Fórmulas bem-formuladas contendo predicados e quantificadores são chamados de fbf's predicadas.

Fbf's predicadas

São construídos a partir destas regras:

- Todo átomo é uma fórmula da Lógica de Predicados;
- Se H é fórmula então $(\neg H)$ também é uma fórmula;
- Se H e G são fórmulas, então $(H \vee G)$ também é fórmula;
- Se H e G são fórmulas, então $(H \wedge G)$ também é fórmula;
- Se H e G são fórmulas, então $(H \rightarrow G)$ também é fórmula;
- Se H e G são fórmulas, então $(H \leftrightarrow G)$ também é fórmula;
- Se H é fórmula e x variável, então:

$\forall x\, (H(x))$ e $\exists x\, (H(x))$ são fórmulas

Exemplos

Quais das fórmulas abaixo são fbf's predicadas?

- $P(x)\ \forall x \wedge \exists y$ → **NÃO**
- $P(x) \vee Q(y)$ → **SIM**
- $\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)]$ → **SIM**
- $\forall x\ (\exists y\ [P(x,y) \wedge Q(x,y)] \rightarrow R(x))$ → **SIM**

Validade

Uma interpretação para uma expressão envolvendo predicados consiste em:

a) o conjunto universo ou domínio da interpretação precisa incluir pelo menos um objeto.
b) A especificação de uma propriedade dos objetos no domínio para cada predicado na expressão.
c) A atribuição de um objeto particular no conjunto universo para cada símbolo constante na expressão.

Uma fbf predicada é válida se ela é verdadeira para todas as interpretações possíveis.

Validade

	Fbf’s Proposicionais	Fbf’s Predicadas
Valores Lógicos	Verdadeiro ou falso, dependendo dos valores lógicos atribuídos às letras de proposição.	Verdadeiro, falso ou talvez (se a fbf toiver uma variável livre) sem valor lógico, dependendo da interpretação.
“Intrinsecamente verdadeiro”	Tautologia – verdadeiro para todas as atribuições de valores lógicos	Fbf válida – verdadeira para todas as interpretações.
Metodologia	Algoritmo (tabela-verdade) para determinar se uma fbf é uma tautologia.	Não existe algoritmo para determinar se uma fbf é válida.

Exemplos

- $\forall x\,(P(x)) \rightarrow \exists x(P(x))$ ➡ SIM
- $\forall x\,(P(x)) \rightarrow P(a)$ ➡ SIM
- $\forall x\,[\,P(x\,) \wedge Q(x)] \leftrightarrow \forall x\,(\,P(x\,)) \wedge \forall x\,(Q(x))$ ➡ SIM
- $P(x) \rightarrow [Q(x) \rightarrow P(x)]$ ➡ SIM
- $\exists x\,(P(x)) \rightarrow \forall x\,(P(x))$ ➡ NÃO

Escopo e Variável Livre

- “Símbolos de agrupamento”, como parênteses ou colchetes, identificam o <u>escopo</u> de um quantificador, a parte da fbf à qual o quantificador se aplica.

  Ex: $\forall x\, [\, P(x\,) \wedge Q(x)] \leftrightarrow \forall x\, (\, P(x\,)) \wedge \forall x\, (Q(x))$

  $\forall x\, (P(x) \rightarrow \exists x(P(x)))$

  $\exists x\, (P(x)) \rightarrow \forall x\, (P(x))$

- Se alguma variável ocorre em uma fbf onde não faz parte de um quantificador nem está no escopo de um quantificador envolvendo a variável, ela é dita uma <u>variável livre</u>.

  Ex: $\forall x\, (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$

  $\forall x\, (P(x) \rightarrow \exists x(P(x, y)))$

Lógica de Predicados

Um argumento pode ser ser representado em forma simbólica como:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow Q$$

Onde as fbf's são construídas a partir de predicados e quantificadores, assim como de conectivos lógicos e símbolos de agrupamento.

Para um argumento válido, Q tem que ser uma consequência lógica de P_1, P_2,…, P_n baseada apenas na estrutura interna do argumento, e não na veracidade ou falsidade de Q em qualquer interpretação particular.

Lógica de Predicados

Em outras palavras, a fbf

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow Q$$

tem que ser válida (verdadeira) em todas as interpretações possíveis.

Usaremos o sistema de regras de dedução para construir uma sequência de demonstração que parta das hipóteses e chegue à conclusão.

As regras devem preservar os valores lógicos, de modo que se, em alguma interpretação, todas as hipóteses forem verdadeiras, então a conclusão também será verdadeira com aquela interpretação.

Regras de Dedução para Lógica de Predicados

As regras de equivalência e as regras de inferência para a lógica proposicional ainda fazem parte da lógica de predicados.

Um argumento da forma

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$$

ainda é válido por *modus ponens*, mesmo que as fbf's envolvidas sejam predicadas.

Regras de Dedução para Lógica de Predicados

Use a lógica de predicados para provar a validade do argumento

$$\forall x\,(R(x)) \land \forall x\,(R(x)) \rightarrow \forall x\,(S(x)) \rightarrow \forall x\,(S(x))$$

Uma sequência de demonstração é:

1. $\forall x\,(R(x))$ hip (hipótese)
2. $\forall x\,(R(x)) \rightarrow \forall x\,(S(x))$ hip (hipótese)
3. $\forall x\,(S(x))$ 1, 2, MP

Regras de Dedução para Lógica de Predicados

- A abordagem geral para provar esses argumentos é:
  - ✓ retirar os quantificadores;
  - ✓ manipular as fbf's sem os quantifcadores, e;
  - ✓ depois colocá-los no lugar.
- A novas regras de inferência nos fornecem mecanismos para a retirada e a inserção dos quantificadores.
  - ✓ temos 4 novas regras para:
    - ➢ retirada de cada um dos quantificadores, o universal ($\forall$) e o existencial ($\exists$);
    - ➢ inserção de cada um dos quantificadores, o universal ($\forall$) e o existencial ($\exists$);

Regras de Inferência

De	Podemos deduzir	Nome/Abrev. da Regra	Restrições sobre o USO
$\forall x\,(P(x))$	P(*t*), onde *t* é uma variável ou um símbolo constante.	Particularização Universal– PU	Se *t* for uma variável, não deve estar dentro do escopo de um quantificador para *t*.
$\exists x\,(P(x))$	P(*t*), onde *t* é uma variável ou um símbolo constante não-utilizado anteriormente na sequência de demonstração.	Particularização Existencial – PE	É necessário que seja a primeira regra a usar *t*.
P(x)	$\forall x\,(P(x))$	Generalização Universal – GU	P(*x*) não pode ter sido deduzida de nenhuma hipótese na qual *x* é uma variável livre nem pode ter sido deduzida, através de PE, de uma fbf na qual *x* é uma variável livre.
P(x) ou P(a)	$\exists x\,(P(x))$	Generalização Existencial– GE	Para ir de P(a) a $\exists x\,(P(x))$, x não pode aparecer em P(a).

Particularização Universal (PU)

- Esta regra diz que podemos deduzir P(x), P(y), P(z), P(a), … de $\forall x$ (P(x)), retirando, assim, um quantificador universal.
  - ✓ se P é verdadeira para todos os elementos do conjunto universo, podemos nomear um tal elemento por um nome arbitrário de variável, como x, y ou z, ou podemos especificar uma constante particular no domínio, e P ainda é verdadeira para todos esses elementos.

Particularização Universal (PU)

A particularização universal pode ser usada para provar um dos "silogismos" clássicos do filósofo e cientista grego Aristóteles, que viveu de 384 a 322 a.C. e foi o primeiro a desenvolver um sistema de lógica formal.

- ✓ o argumento tem a forma:
  - ➢ Todo homem é mortal.
  - ➢ Sócrates é homem.
  - ➢ Logo, Sócrates é mortal.
- ✓ o argumento fica:
  - ➢ H(x): "x é humano";
  - ➢ s: símbolo constante;
  - ➢ M(x): "x é mortal".

$$\forall x\, (\, H(x) \rightarrow M(x)) \wedge H(s) \rightarrow M(s)$$

Particularização Universal (PU)

$$\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x)) \wedge H(s) \rightarrow M(s)$$

1.	$\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x))$	hip (hipótese)
2.	$H(s)$	hip (hipótese)
3.	$H(s) \rightarrow M(s)$	1, PU
4.	$M(s)$	2, 3, MP

Particularização Universal (PU)

- Sem a restrição sobre a particularização universal, uma hipótese da forma $\forall x\, (\exists y\, (P(x, y)))$ poderia levar à fbf $\exists y\, (P(y, y))$;
- Neste caso, a variável x foi substituída por y no escopo de um quantificador para y;
- Isso não é válido.

  Ex: Se o universo é o conjunto dos números inteiros e se $P(x,y)$ significa "$x < y$", então:

  ✓ $\forall x\, (\exists y\, (P(x, y)))$ é verdade, ou seja, "para todo inteiro existe um inteiro maior"

  ✓ Mas, $\exists y\, (P(y, y)$ é falso, ou seja, já que "nenhum inteiro tem a propriedade de ser maior do que si mesmo".

Exemplo

- Demonstre o argumento $\forall x\, [P(x) \to R(x)] \land \neg R(y) \to \neg P(y)$

1.	$\forall x\, [P(x) \to R(x)]$	hip (hipótese)
2.	$\neg R(y)$	hip (hipótese)
3.	$P(y) \to R(y)$	1, PU
4.	$\neg P(y)$	2, 3, MT

Particularização Existencial (PE)

- Esta regra nos permite retirar o quantificador existencial.
- A partir de $\exists x\ (P(x))$, podemos deduzir $P(x)$, $P(y)$, $P(z)$, $P(a)$, …, desde que esses sejam essencialmente nomes ou símbolos constantes novos.
  - ✓ se P for verdadeira para algum elemento do conjunto universo, podemos dar um nome específico a esse elemento, mas não podemos supor nada mais sobre ele.

Particularização Existencial (PE)

$$\forall x\,[P(x) \rightarrow Q(x)] \land \exists y\,(P(y)) \rightarrow Q(a)$$

1.	$\forall x\,[P(x) \rightarrow Q(x)]$	hip (hipótese)
2.	$\exists y\,(P(y))$	hip (hipótese)
3.	$P(a)$	2, PE
4.	$P(a) \rightarrow Q(a)$	1, PU
5.	$Q(a)$	3, 4, MP

- No passo 3, foi dado o nome a ao elemento específico que tem propriedade P;
- No passo 4, usou-se, então, PU para dizer que um condicional que é universalmente verdadeiro no domínio certamente é verdadeiro para esse elemento a.

Particularização Existencial (PE)

- As ordens dos passos 3 e 4 podem ser trocadas?
  - ✓ Se PU tivesse sido utilizada primeiro na hipótese 1 para se nomear a constante a, não existiria nenhuma razão para supor que esse elemento a particular é o que tem a propriedade P, como na hipótese 2.

O efeito da restrição sobre a particularização existencial é que você deve, primeiro, olhar todas as suas hipóteses e, se quiser usar PE em alguma delas, faça-o primeiro.

Generalização Universal (GU)

- A generalização universal permite que se insira um quantificador universal.

  No entanto, isso precisa ser feito muito cuidadosamente.
- Se soubermos que P(x) é verdadeiro e que x é um elemento absolutamente arbitrário, isto é, que x pode ser qualquer elemento no conjunto universo, então podemos concluir que $\forall x\ (P(x))$.
  - ✓ se supormos que x representa algum elemento específico no domínio que tem a propriedade P, então não podemos generalizar que todo elemento no conjunto universo tem a propriedade P.

Generalização Universal (GU)

$$\forall x\,[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \forall x\,(P(x)) \rightarrow \forall x\,(Q(x))$$

1. $\forall x\,[P(x) \rightarrow Q(x)]$	hip (hipótese)
2. $\forall x\,(P(x))$	hip (hipótese)
3. $P(x) \rightarrow Q(x)$	1, PU
4. $P(x)$	2, PU
5. $Q(x)$	3, 4, MP
6. $\forall x\,(Q(x))$	5, GU

- No passo 4, NOTE que não existe restrição em PU sobre usar novamente um mesmo nome;

Generalização Universal (GU)

1. $P(x)$ hip (hipótese)
2. $\forall x\,(P(x))$ 1, PU

- Uso incorreto da GU, no passo 2;
- x estava livre na hipótese.

Ex: Conjunto universo consiste de todos os carros;

P(x) significa que "x é amarelo"

Algum carro pode ser amarelo, mas certamente não é verdade que todos os carros são amarelos.

Generalização Universal (GU)

1.	$\forall x\ [\exists y\ (Q(x, y)]$	hip (hipótese)
2.	$\exists y\ (Q(x, y))$	1, PU
3.	$Q(x, t)$	2, PE
4.	$\forall x\ (Q(x, t))$	3, GU

- Uso incorreto da GU, no passo 4;
- Q(x, t) foi deduzido da fbf no passo 2, no qual x é livre usando PE.

Ex: Conjunto universo consiste de todos os números inteiros;

Q(x, y) significa que "x + y = 0"

Se t é um inteiro em particular, fixo, não é verdade que somando qualquer inteiro x a t obteremos zero.

Exemplo

- Demonstre o argumento $\forall x\, [P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \forall x\, [Q(x) \wedge P(x)]$

1. $\forall x\, [P(x) \wedge Q(x)]$ hip (hipótese)
2. $P(x) \wedge Q(x)$ 1, PU
3. $Q(x) \wedge P(x)$ 2, com
4. $\forall x\, [Q(x) \wedge P(x)]$ 3, GU

Generalização Existencial (GE)

- Permite a inserção de um quantificador existencial;
- De P(x) ou P(a) podemos deduzir $\exists x(P(x))$;
- Se algo foi nomeado como tendo a propriedade P, logo, podemos dizer que existe algum elemento que tem a propriedade P.

Generalização Universal (GU)

Ex: Demonstre o argumento $\forall x\,(P(x)) \rightarrow \exists x\,(P(x))$

1. $\forall x\,(P(x))$	hip (hipótese)
2. $P(x)$	1, PU
3. $\exists x\,(P(x))$	2, GE

- Sem a restrição sobre a generalização, de P(a, y) poderíamos deduzir $\exists y\,(P(y, y))$;
- A variável quantificada, y, que foi colocada no lugar do símbolo constante **a**, já havia aparecido na fbf à qual se aplicou a generalização existencial;
- Mas, o argumento $P(a, y) \rightarrow \exists y\,(P(y, y))$ não é válido.

Ex: conjunto universo: números inteiros

se P(x, y) significa "y > x" e **a** representa o número 0 então, se y > 0, isso não significa que existe um inteiro y que é maior do que si mesmo.

Exemplo

- Use a lógica de predicados para prova o argumento:

$$\forall x\, [\, P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \forall x\, (P(x)) \wedge \forall x\, (Q(x))$$

1. $\forall x\, [\, P(x) \wedge Q(x)]$	hip (hipótese)
2. $P(x) \wedge Q(x)$	1, PU
3. $P(x)$	2, simp
4. $Q(x)$	2, simp
5. $\forall x\, (P(x))$	3, GU
6. $\forall x\, (Q(x))$	4, GU
7. $\forall x\, (P(x)) \wedge \forall x\, (Q(x))$	5,6, conj

Lógica de Predicados

- Como extensão do método dedutivo, podemos inserir uma hipótese "temporária" em uma demonstração.
- Se alguma fbf T for inserida em uma sequência de demonstração e, finalmente, uma fbf F for deduzida de T e de outras hipóteses, então a fbf T $\rightarrow$ F pode ser deduzida das outras hipóteses e, portanto, pode ser inserida na sequência de demonstração;

$$[P(x) \rightarrow \forall y\,(Q(x,y))] \rightarrow \forall y\,[P(x) \rightarrow Q(x,y)]$$

1.	$P(x) \rightarrow \forall y\,(Q(x,y))$	hip (hipótese)
2.	$P(x)$	hip temporária
3.	$\forall y\,(Q(x,y))$	1, 2, MP
4.	$Q(x,y)$	3, PU
5.	$P(x) \rightarrow Q(x,y)$	retirada da hip temporária
6.	$\forall y\,[P(x) \rightarrow Q(x,y)]$	5, GU

Exemplo

- Use a lógica de predicados para prova o argumento:

$$\neg[\exists x\,(A(x))] \rightarrow \forall x\,(\neg A(x))$$ – NEGAÇÃO (neg)

1. $\neg[\exists x\,(A(x))]$ hip (hipótese)
2. $A(x)$ hip temporária
3. $\exists x\,(A(x))$ 2, GE
4. $A(x) \rightarrow \exists x\,(A(x))$ retirada da hip temporária
5. $\neg A(x)$ 1, 4, MT
6. $\forall x\,(\neg A(x))$ 5, GU

$$\neg[\forall x\,(A(x))] \rightarrow \exists x\,(\neg A(x))$$ – NEGAÇÃO (neg)

Exemplo

- Use a lógica de predicados para prova o argumento:

$$\forall x\,[\,P(x) \vee Q(x)] \rightarrow \neg[\exists x\,(P(x))] \rightarrow \forall x\,(Q(x))$$

1. $\forall x\,[\,P(x) \vee Q(x)]$	hip (hipótese)
2. $\neg[\exists x\,(P(x))]$	hip (hipótese)
3. $\forall x\,(\neg P(x))]$	2, neg
4. $\neg P(x)$	3, PU
5. $P(x) \vee Q(x)$	1, PU
6. $Q(x)$	4, 5, SD
7. $\forall x\,(Q(x))$	6, GU

Exercício

1) A fbf $\forall x\ [\ P(x) \vee Q(x)] \rightarrow \forall x\ (\ P(x)) \vee \forall x\ (Q(x))$ é válida ou não? Explique.

2) Determine o valor lógico de cada uma das fbf's a seguir onde o conjunto universo é o conjunto dos inteiros.

a) $\forall x\ (\exists y\ (x+y = x))$
b) $\exists y\ (\forall x\ (x+y = x))$
c) $\forall x\ (\exists y\ (x+y = 0))$
d) $\exists y\ (\forall x\ (x+y = 0))$

Exercício

3) Considere a fbf $\forall x\, [\exists y\, (P(x, y)) \wedge \exists y (Q(x, y))] \rightarrow \forall x\, [\exists x\, (P(x, y) \wedge Q(x, y))]$

a) Encontre uma interpretação que mostre que essa fbf não é válida.

b) Encontre o erro na seguinte "demonstração" dessa fbf:

$\forall x\, [\exists y\, (P(x, y)) \wedge \exists y (Q(x, y))]$	hip (hipótese)
$\forall x\, [\, (P(x, a)) \wedge (Q(x, a))]$	1, PE
$\forall x\, [\exists y\, (P(x, y) \wedge Q(x, y))]$	2, GE

Exercício

4) Prove que cada uma das fbf's é um argumento válido.

   a) $\forall x\,(P(x)) \rightarrow \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$

   b) $\exists x\,[\,A(x) \wedge B(x)] \rightarrow \exists x\,(A(x)) \wedge \exists x\,(B(x))$

   c) $\exists x\,[\,\forall y\,(Q(x, y)] \rightarrow \forall y\,[\,\exists x\,(Q(x, y))]$

   d) $[P(x) \rightarrow \exists x\,(Q(x, y))] \rightarrow \exists y\,[P(x) \rightarrow Q(x, y)]$

5) Todo crocodilo é maior do que qualquer jacaré. Samuca é um crocodilo. Mas existe uma serpente e Samuca não é maior do que essa serpente. Portanto, alguma coisa não é um jacaré. $C(x)$, $J(x)$, $M(x, y)$, s, $S(x)$.